

ΜΑΥ611: Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι (2024-25) - Ιούνιος 2025

Ημερομηνία: 17/6/2025

Διάρκεια: 3 ώρες

1. α) Βρείτε όλες τις λύσεις $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $(z+1)^5 = 2+2i$.
 β) Προσδιορίστε την εικόνα $f(S)$ του συνόλου $S = \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \leq |z+i|\}$ κάτω από την απεικόνιση $f(z) = 1/z$. Σχεδιάστε πρόχειρα τα $S, f(S)$. (1 + 1 μον.)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0. \end{cases}$$

- α) Βρείτε όλα τα σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι συνεχής.
 β) Βρείτε όλα τα σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη. (1 + 1 μον.)
3. α) Υποθέτουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει για κάποιο $z_0 \neq 0$. Δείξτε ότι συγκλίνει απόλυτα για κάθε $z \in D(0, |z_0|)$ και ομοιόμορφα για κάθε $z \in \overline{D(0, r)}$, $r < |z_0|$.
 β) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z-1)^{k+1}$. Βρείτε έπειτα την παράγωγό της, στα σημεία όπου αυτή ορίζει διαφορίσιμη συνάρτηση, και υπολογίστε το άθροισμα της δυναμοσειράς. (1 + 1 μον.)

4. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη γ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\int_{\gamma} z e^z dz$, όπου γ η πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $\pi, -1, -1-i\pi$.

β) $\int_{\gamma} \frac{1}{(z+i)(z-4i)} + \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz$, όπου $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = \pi e^{it}$. (1 + 1 μον.)

5. α) Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ μια κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Δείξτε ότι

$$2\pi i \delta_{\gamma}(z) f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

για κάθε $z \in D \setminus \gamma([a, b])$, όπου $\delta_{\gamma}(z)$ ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ γύρω από το z .

- β) Έστω ότι το D είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα 2. Δείξτε ότι αν η $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη με $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \partial D(0, 2)$, τότε

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{2^n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(1 + 1 μον.)

6. Βρείτε και ταξινομήστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^z}$. (1 μον.)

Αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!